

Разработка эффективных
параллельных/распределенных алгоритмов
решения задачи неравновесной фильтрации
(композиционная модель)

Қасымбек Нұрислам Мұратбекұлы
PhD докторант КазНУ имени аль-Фараби
Алматы, Казахстан

Задачи

- ✓ Численное моделирование многокомпонентного многофазного течения методами Ньютона и GMRES в задачах нефтедобычи
- ✓ Разработка и реализация параллельных алгоритмов решения задачи нефтедобычи
- ✓ Разработка и реализация фрагментированных алгоритмов решения задачи нефтедобычи

Математическая модель

- $\phi \frac{\partial(\xi_w S_w)}{\partial t} + \text{div}(\xi_w \mathbf{u}_w) = q_w$
- $\phi \frac{\partial(x_{1o}\xi_o S_o + x_{1g}\xi_g S_g)}{\partial t} + \text{div}(x_{1o}\xi_o \mathbf{u}_o + x_{1g}\xi_g \mathbf{u}_g) = q_1$
- $\phi \frac{\partial(x_{1o}\xi_o S_o + x_{2g}\xi_g S_g)}{\partial t} + \text{div}(x_{2o}\xi_o \mathbf{u}_o + x_{2g}\xi_g \mathbf{u}_g) = q_2$
- $\mathbf{u}_\alpha = -\frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \mathbf{k} \nabla p_\alpha, \quad \alpha = o, g, w$
- $x_{1o} + x_{2o} = 1, x_{1g} + x_{2g} = 1, S_o + S_w + S_g = 1,$
- $p_{cow} = p_o - p_w, p_{cgo} = p_g - p_o.$
- $f_{1o}(p_o, x_{1o}, x_{2o}) = f_{1g}(p_g, x_{1g}, x_{2g})$
 $f_{2o}(p_o, x_{1o}, x_{2o}) = f_{2g}(p_g, x_{1g}, x_{2g})$

Граничные условия

- $S_w(x, 0) = S_w^0(x), \quad S_o(x, 0) = S_o^0(x),$
- $p_o(x, 0) = p_o^0(x),$
- $p_o(0, t) = p^{inj}, \quad p_o(1, t) = p^{prod},$
- $S_w(0, t) = S_w^{inj}, \quad \frac{\partial S_w}{\partial x}(1, t) = 0,$
- $S_o(0, t) = 0, \quad \frac{\partial S_w}{\partial x}(1, t) = 0.$

Математическая модель

- $F = \xi_o S_o + \xi_g S_g$
- $L = \frac{\xi_o S_o}{F}, V = \frac{\xi_g S_g}{F}$
- $L + V = 1$
- $Z_m = Lx_{mo} + (1 - L)x_{mg}, m = 1, 2, \dots, N_c$

Разностная схема

- $x_{m0}^{n+1,l+1} = x_{m0}^{n+1,l} + \Delta x_{m0}^{n+1,l+1}, \quad m = 1, 2, \dots, N_c - 1,$
- $z_{m0}^{n+1,l+1} = z_{m0}^{n+1,l} + \Delta z_{m0}^{n+1,l+1}, \quad m = 1, 2, \dots, N_c - 1,$
- $L^{n+1,l+1} = L^{n+1,l} + \Delta L^{n+1,l+1},$
- $F^{n+1,l+1} = F^{n+1,l} + \Delta F^{n+1,l+1},$
- $S^{n+1,l+1} = S^{n+1,l} + \Delta S^{n+1,l+1},$
- $p^{n+1,l+1} = p^{n+1,l} + \Delta p^{n+1,l+1}$

Приведение к СЛАУ

Описанные уравнения приводятся к системе линейных уравнений вида:

$$Ax = b$$

Методы решения

- Gmres (модификации)
- CG
- BiCG
- BiCGStab

Предобуславливатели

- ILU(0)
- ILU(k)
- ILQ

Метод обобщенных минимальных невязок(GMRES)

$$Ax = b$$

$$K_m = K_m(A, v) = \text{span}\{v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v\}$$

Любой вектор x из подпространства Крылова:

$$x = x_0 + V_m y$$

Приближенное решение системы:

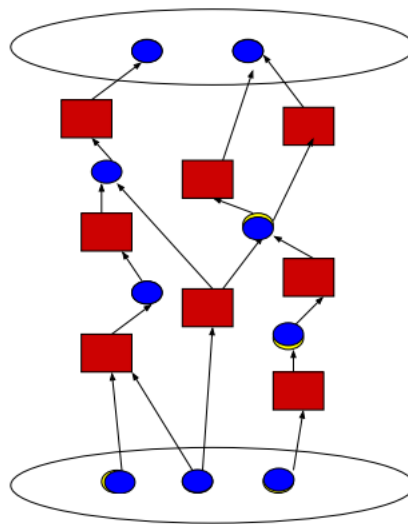
$$\begin{aligned}x_m &= x_0 + V_m y_m \\y_m &= \arg \min_y \|\beta e_1 - \bar{H}_m y\| \\ \bar{H}_m y &= \beta e_1\end{aligned}$$

Параллельный алгоритм

- $r_0 = P^{-1}(b - Ax_0)$
- $\beta = \|r_0\|$
- $v_1 = r_0/\beta$
- for $i=1,\dots,m$
 - $w = P^{-1}Av_i$
 - for $k=1,\dots,i$
 - $h_{k,i} = (w, v_k)$
 - $w = w - h_{k,i}v_k$
 - end k
 - $h_{i+1,i} = \|w_i\|$
 - $v_{j+1} = \frac{w}{h_{i+1,i}}$
- end i
- $y_m = \arg \min_y \|\beta e_1 - \bar{H}_m y\|$
- $x_m = x_0 + V_m y_m$

Фрагментированный алгоритм

- Фрагментированная программа пишется на языке LuNA и выполняется в системе LuNA. Фрагментированный алгоритм делит задачу на фрагменты вычислений и фрагменты данных.

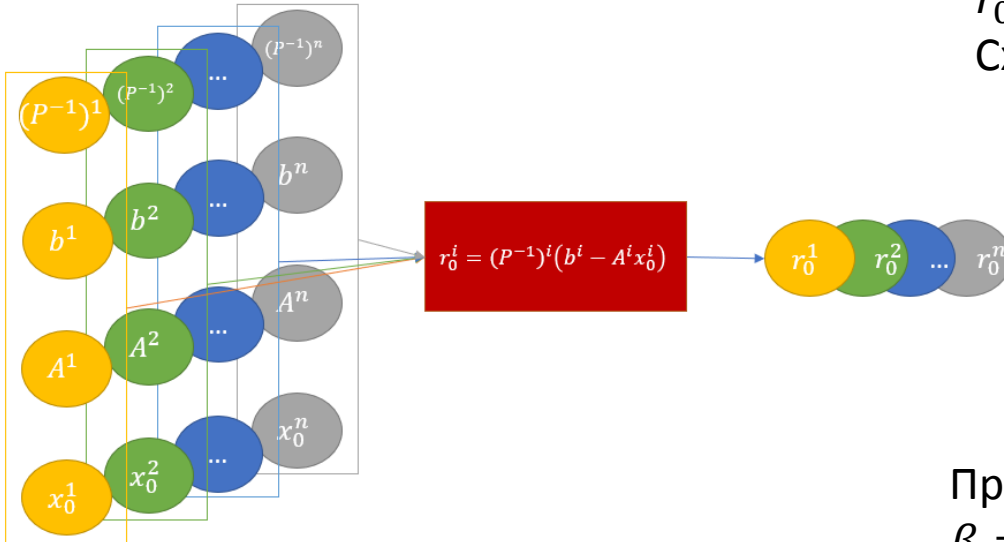


Фрагментированный алгоритм

Простая запись:

$$r_0 = P^{-1}(b - Ax_0)$$

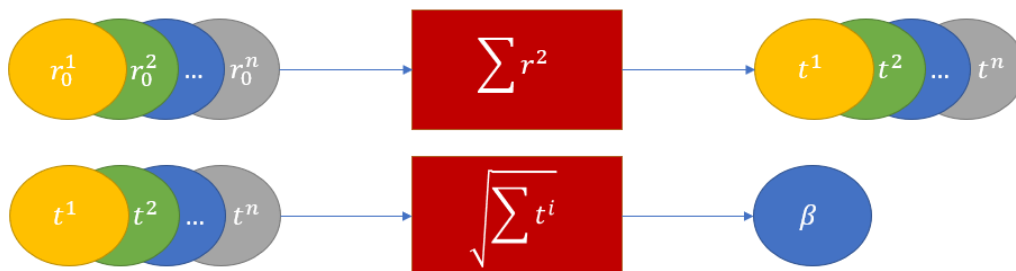
Схема фрагментированного алгоритма:



Простая запись:

$$\beta = \|r_0\|$$

Схема фрагментированного алгоритма:



Результаты

Сравнительные результаты программы на LuNA без и с воспроизведением трасс
Время в секундах

Размер матрицы A	600x600		1200x1200		2400x2400		4800x4800	
	without trace	with trace	without trace	with trace	without trace	with trace	without trace	with trace
Количество процессов								
2	84.21	7.925	312.917	8.366	1159.906	105.401	5527.718	1517.654
4	81.646	4.367	312.031	25.417	1321.223	185.1	6467.069	3078.793
8	120.273	4.404	490.472	31.84	2009.271	309.636	10585.324	5061.385

Результаты

Сравнительные результаты программы на MPI и на LuNA с воспроизведением трасс
Время в секундах

Размер матрицы A	600x600		1200x1200		2400x2400		4800x4800	
	MPI	LuNA	MPI	LuNA	MPI	LuNA	MPI	LuNA
1/Последовательно	0.304		0.202		1.33		10.47	
2	0.054	7.925	0.15	8.366	0.96	105.401	7.432	1517.654
4	0.026	4.367	0.11	25.417	0.77	185.1	6.69	3078.793
8	0.03	4.404	0.174	31.84	1.043	309.636	5.52	5061.385

Заключение

- ✓ Разработан и реализован параллельный алгоритм решения задачи нефтедобычи с использованием стандарта MPI и фрагментированный алгоритм в системе LuNA
- ✓ Фрагментированный алгоритм в системе LuNA была протестирована без и с воспроизведением трасс
- ✓ Работа требует дальнейшего продолжения, в частности, анализа полученных результатов и оптимизаций на их основе

Спасибо за внимание!