Глобальный стохастический алгоритм блуждания по сетке для решения нелинейной системы уравнений Бюргерса

Бухашеев Олег, ММФ НГУ

Научный руководитель:

д-р физ.-мат. наук, проф. К. К. Сабельфельд

Новосибирск - 2022

Введение:

Движения нестационарных сред описываются системой уравнений Навье-Стокса. Частным случаем этой системы являются уравнения Бюргерса.

Исследование посвящено решению систем уравнений *Бюргерса* и *Навье - Стокса* с помощью глобального стохастического алгоритма блуждания по сетке (GRWA).

Система ур-ий Навье - Стокса:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} + \frac{1}{Re}\Delta \vec{v} - \nabla p \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \end{cases},$$

где $Re = \frac{Ud}{\nu}$ - число Рейнольдса, $\vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ - скорость потока.

Система ур-ий Бюргерса:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} + \frac{1}{Re}\Delta \vec{v} \cancel{- \nabla p} \\ \cancel{\nabla \cdot \vec{v} = 0} \end{cases},$$

где $Re = \frac{Ud}{\nu}$ - число Рейнольдса, $\vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ - скорость потока.

Актуальность исследования:

- Конечно-разностные методы имеют недопустимую погрешность при больших числах Рейнольдса.
- Классические стохастические блуждания по сферам неприменимы, т.к. система нелинейная.

Постановка задачи:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{Re}\Delta u - u\dfrac{\partial u}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial y} \\
\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{1}{Re}\Delta v - u\dfrac{\partial v}{\partial x} - v\dfrac{\partial v}{\partial y} \\
u(x,y,0) = f_1(x,y) \\
v(x,y,0) = f_2(x,y) \\
u|_{\partial D} = \varphi_1 \\
v|_{\partial D} = \varphi_2
\end{cases},
$$

где $(x, y) \in D \subseteq R^2$ - ограниченная область с границей ∂D, $0 \leqslant t \leqslant t_{max}$.

В качестве примера D - единичный квадрат.

GRWA по сетке:

Идея метода :

$$\dots$$

Стационарное уравнение:

$$\frac{1}{Re}\Delta\vec{v} = (\vec{V_2}\cdot\nabla)\vec{v}$$

Стационарное уравнение:

$$\frac{1}{Re}\Delta\vec{v} = (\vec{V_1}\cdot\nabla)\vec{v}$$

Начальные данные :

$$u(x,y,0)=f_1(x,y),\ v(x,y,0)=f_2(x,y)$$

Известные величины

t

t_{max}

2τ

τ

0

Решение стационарного уравнения DDR:

Рассмотрим уравнение:

$$D\Delta n(r) - v \cdot \nabla n(r) - \lambda^2 n(r) = -f(r), r \in V$$

$f(r)$ - источник частиц,
$n(r)$ - концентрация частиц в точке r,
D - коэффициент диффузии,
v - скорость дрейфа,
$\lambda^2 = \frac{1}{\bar{\tau}}$, где $\bar{\tau}$ является средним временем жизни частицы до того, как она рекомбинирует и поглотится внутри области D.

Решение стационарного уравнения DDR:

$$n(r) = n_1(r) + n_2(r),$$

где $n_1(r)$ - решение задачи с нулевыми граничными условиями, $f(r) \neq 0$
где $n_2(r)$ - решение задачи с ненулевыми граничными условиями, $f(r) = 0$

[1] Karl Sabelfeld, Dmitry Smirnov, Ivan Dimov, Venelin Todorov. A global random walk on grid algorithm for second order elliptic equations.

Вероятностная интерпретация:

Разностный аналог для уравнения
DDR:

$$D\left(\frac{n_{i+1,j}-2n_{i,j}+n_{i-1,j}}{h_x^2}+\frac{n_{i,j+1}-2n_{i,j}+n_{i,j-1}}{h_y^2}\right)-\begin{pmatrix}v_x\\ v_y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{n_{i+1,j}-n_{i-1,j}}{2h_x}\\ \frac{n_{i,j+1}-n_{i,j-1}}{2h_y}\end{pmatrix}-\lambda^2 n=-f_{i,j}$$

После приведения подобных:

$$n_{i,j}=\frac{1}{1+\frac{\lambda^2h^2}{4D}}\cdot\frac{1}{4}\left((1-\frac{v_xh}{2D})n_{i+1,j}+(1+\frac{v_xh}{2D})n_{i-1,j}\right.$$
$$\left.+(1-\frac{v_yh}{2D})n_{i,j+1}+(1+\frac{v_yh}{2D})n_{i,j-1}\right)+f_{i,j}\frac{h^2}{4D}$$

Вероятностная интерпретация:

(i, j) →

(i + 1, j) → $P_{move}^{i+1,j} = \frac{1}{4} \cdot (1 - \frac{v_x h}{2D})$

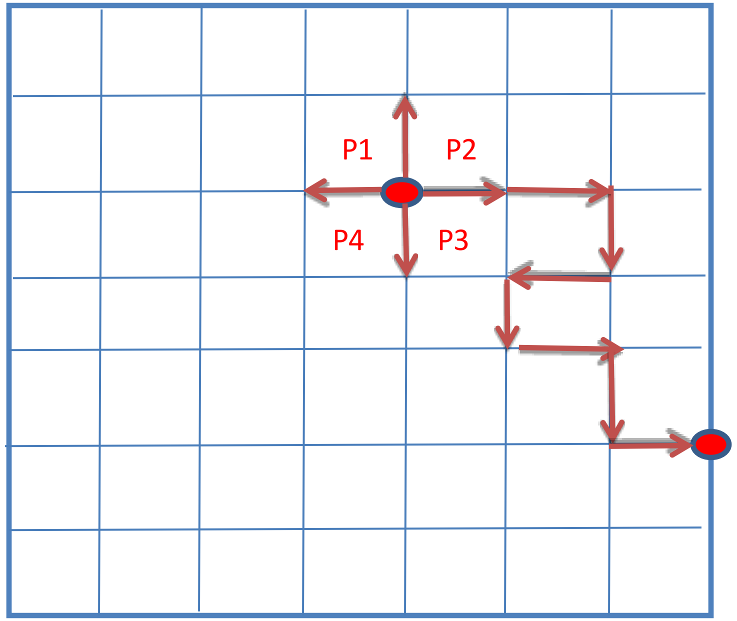
(i - 1, j) → $P_{move}^{i-1,j} = \frac{1}{4} \cdot (1 + \frac{v_x h}{2D})$

(i, j + 1) → $P_{move}^{i,j+1} = \frac{1}{4} \cdot (1 - \frac{v_y h}{2D})$

(i, j - 1) → $P_{move}^{i,j-1} = \frac{1}{4} \cdot (1 + \frac{v_y h}{2D})$

(i, j) → $P_{an} = 1 - \frac{1}{1+\frac{\lambda^2 h^2}{4D}}$

Решение n_1:



Вклад в узел (i, j) :

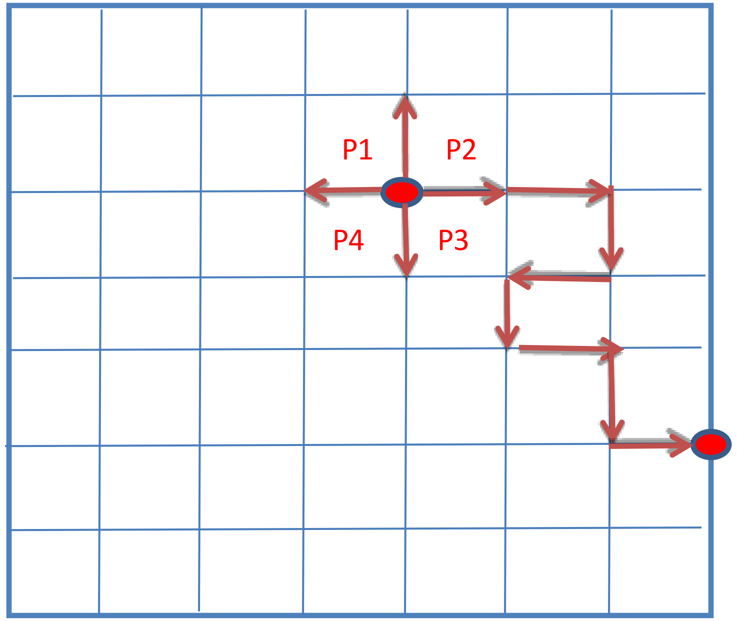
$$\xi_{ij}^k = \frac{f(P_0^k)}{D} S_{ij} \ ,$$

где P_0^k - случайная начальная точка k-ой траектории.

$$\eta_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \xi_{ij}^k$$

$$(\widetilde{n_1})_{ij} = m^2 \frac{h^2}{4} \frac{\eta_{i,j}}{N}$$

Решение n_2:



Вклад в узел (i, j) :

$$S_{ij} = g(Q^k)$$
$$(\tilde{n_2})_{ij} = S_{ij}/K_{ij}$$

Проверка алгоритма:

Параметр	Обозначение	Значение
Число Рейнольдса	Re	100
Количество итераций по времени	—	20
Количество узлов	—	100
Шаг по области	h	$0.1m$
Шаг по времени	τ	$0.25c$

Пример 1:

Test 1 :

$$u(x,y,t) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4(1+\exp((-4x+4y-t)\cdot\frac{1}{32D}))},$$

$$v(x,y,t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4(1+\exp((-4x+4y-t)\cdot\frac{1}{32D}))}.$$

Начальные условия:

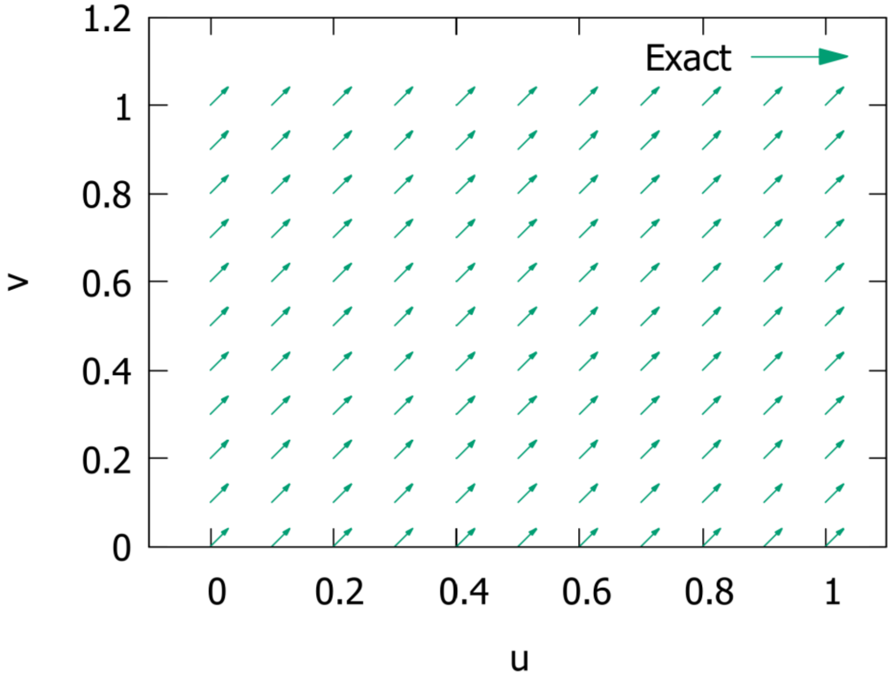
$$f_1(x,y) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4(1+\exp((-4x+4y)\cdot\frac{1}{32D}))},$$

$$f_2(x,y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4(1+\exp((-4x+4y)\cdot\frac{1}{32D}))}.$$

Краевые условия:

$$\varphi_1 = u|_{\partial D}$$

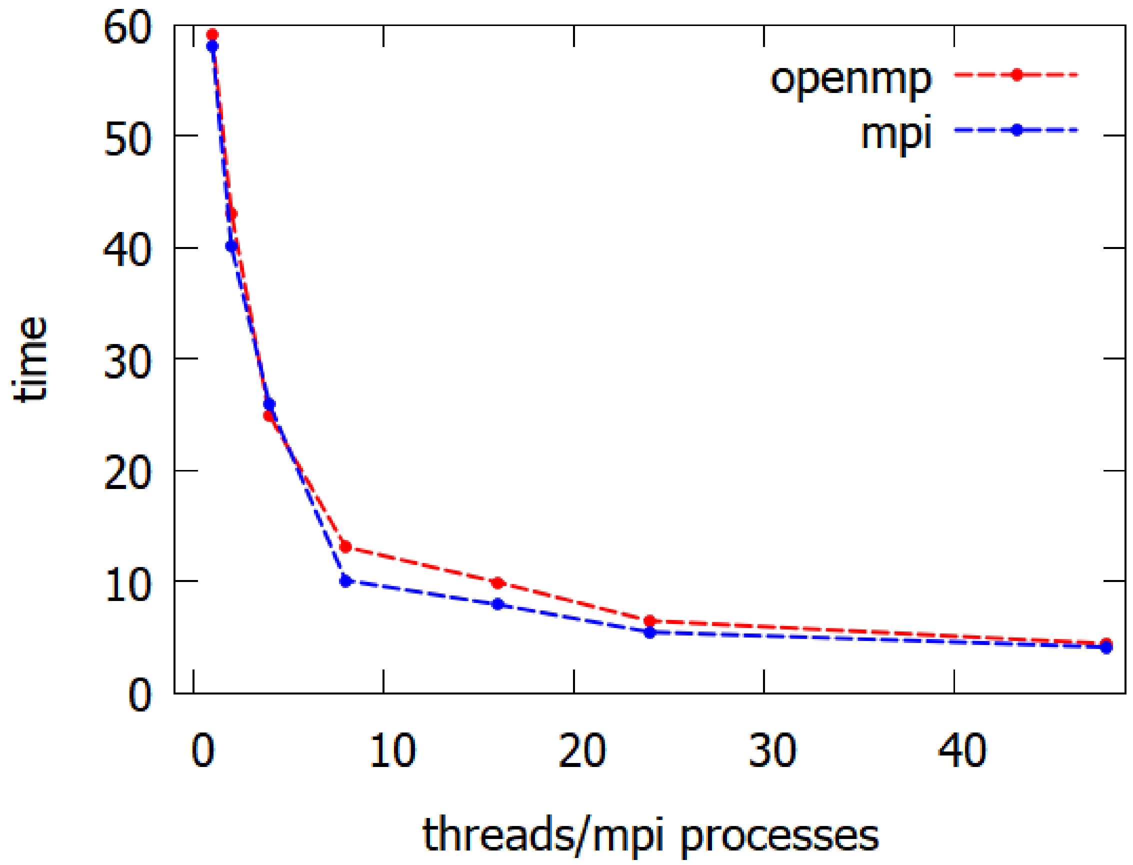
$$\varphi_2 = v|_{\partial D}$$



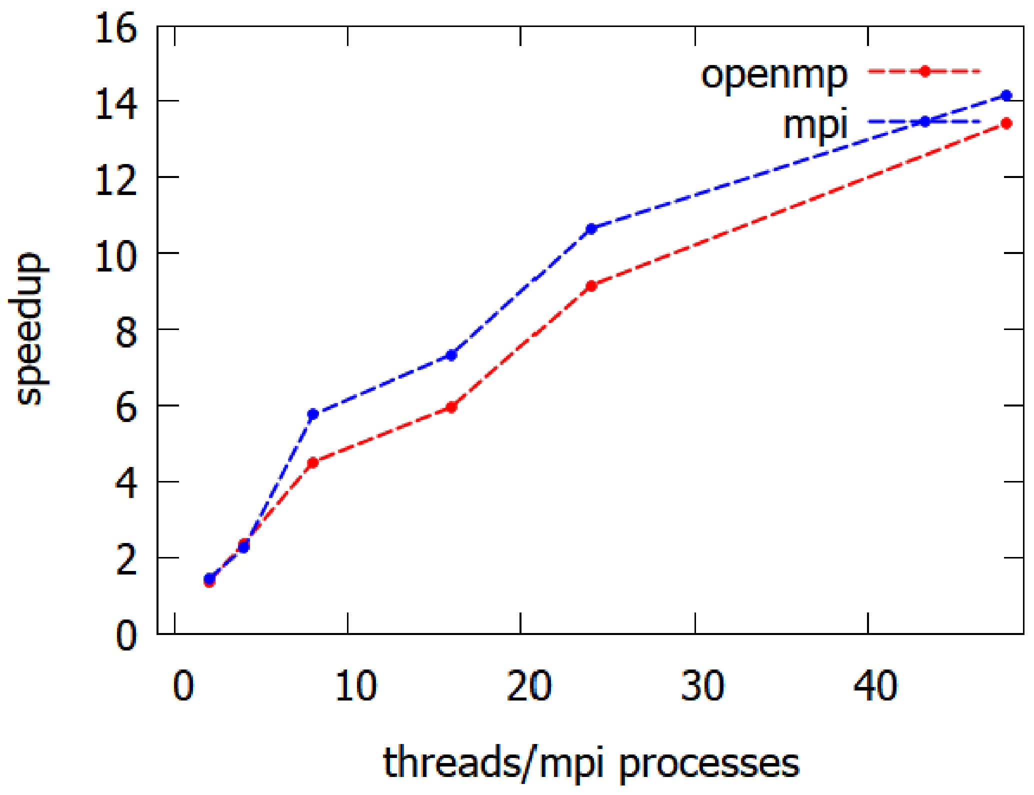
[2] Vineet K. SrivastavaVineet K. SrivastavaU. BhardwajU. Bhardwaj. Numerical Solutions to Burgers’ Equations.

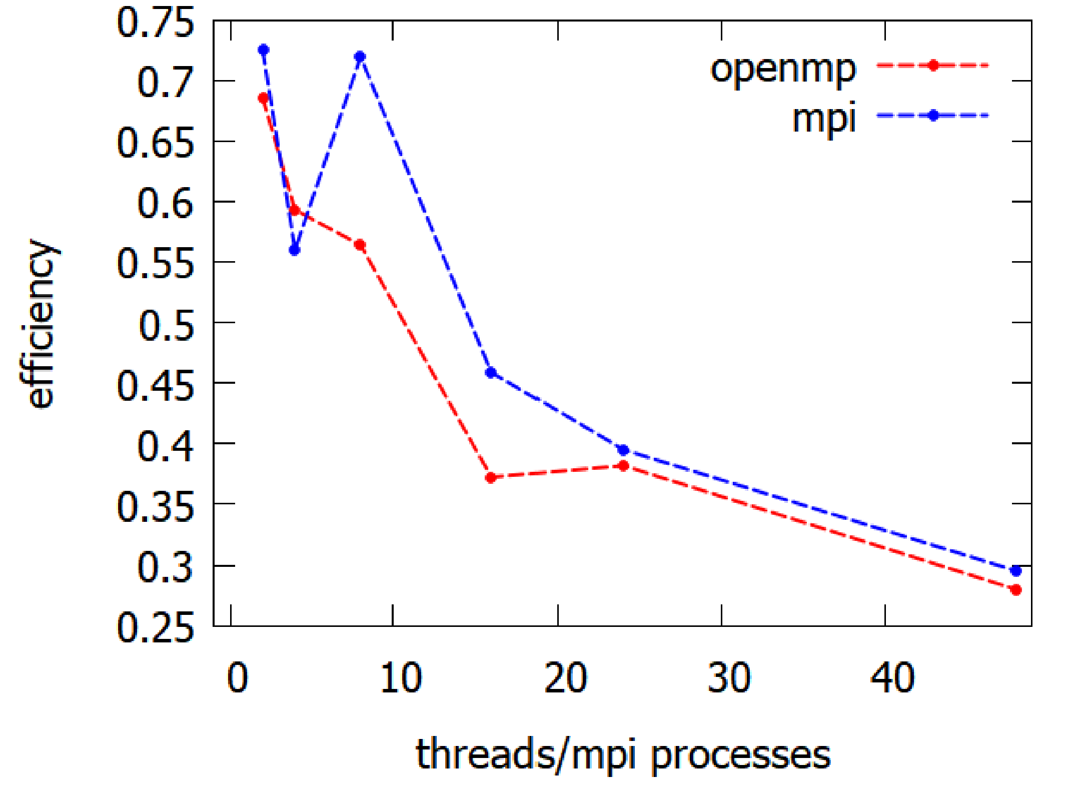
Parallel program:

xl230g9q	30 шт. HP XL230a Gen9 и 5 шт. HP XL250a Gen9	24 ядра, 192 ГБ ОЗУ



Parallel program:





Спасибо за внимание!