



Параллельная реализация продольно-поперечной прогонки на основе метода Яненко на примере уравнения теплопроводности

Магистрант: Кенжебек Е.

Летняя международная XXXI молодежная Школа-конференция по параллельному программированию

12.07.2019 г.

План доклада

- Постановка задачи
 - 2D модель уравнения теплопроводности
- Математическая модель
- Идея решения
 - Распараллеливание прогонки
 - Метод Яненко
- Реализация
 - 1D декомпозиция (MPI)
 - 2D декомпозиция (MPI)
- Тестирование
 - Результаты (ускорение, эффективность)
- Заключение

Постановка задачи

- Двумерное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + f \right)$$

$$f = -3$$

- Начальные условия:

$$U(x, y, 0) = x^2 + y^2$$

- Граничные условия:

$$U(0, y, t) = y^2 + t$$

$$U(1, y, t) = 1 + y^2 + t$$

$$U(x, 0, t) = x^2 + t$$

$$U(x, 1, t) = 1 + x^2 + t$$

- Точное решение:

$$U(x, y, t) = x^2 + y^2 + t$$

Математическая модель

- Первый дробный шаг ($\Delta x = \Delta y = \Delta$):

$$u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^k = \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta^2} \left[(u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k) + (u_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + u_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}}) \right] + \frac{\alpha \Delta t}{2} f \quad (1)$$

- Второй дробный шаг:

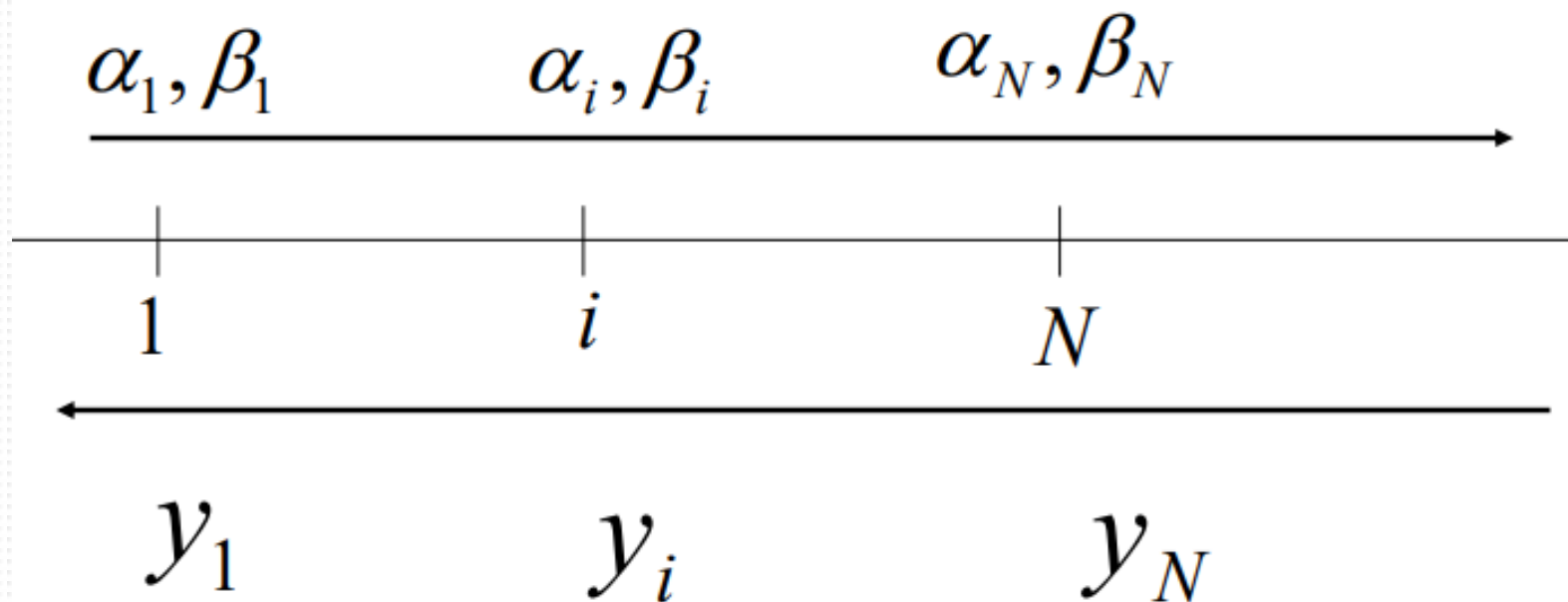
$$u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta^2} \left[(u_{i+1,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1}) + (u_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + u_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}}) \right] + \frac{\alpha \Delta t}{2} f \quad (2)$$

- $r = \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta^2}$, (1) и (2)

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ -ru_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}} + (1+2r)u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - ru_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} = ru_{i-1,j}^k + (1-2r)u_{i,j}^k + ru_{i+1,j}^k + \frac{\alpha \Delta t}{2} f \end{array}$$

$$-ru_{i-1,j}^{k+1} + (1+2r)u_{i,j}^{k+1} - ru_{i+1,j}^{k+1} = ru_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}} + (1-2r)u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + ru_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{\alpha \Delta t}{2} f$$

Метод прогонки



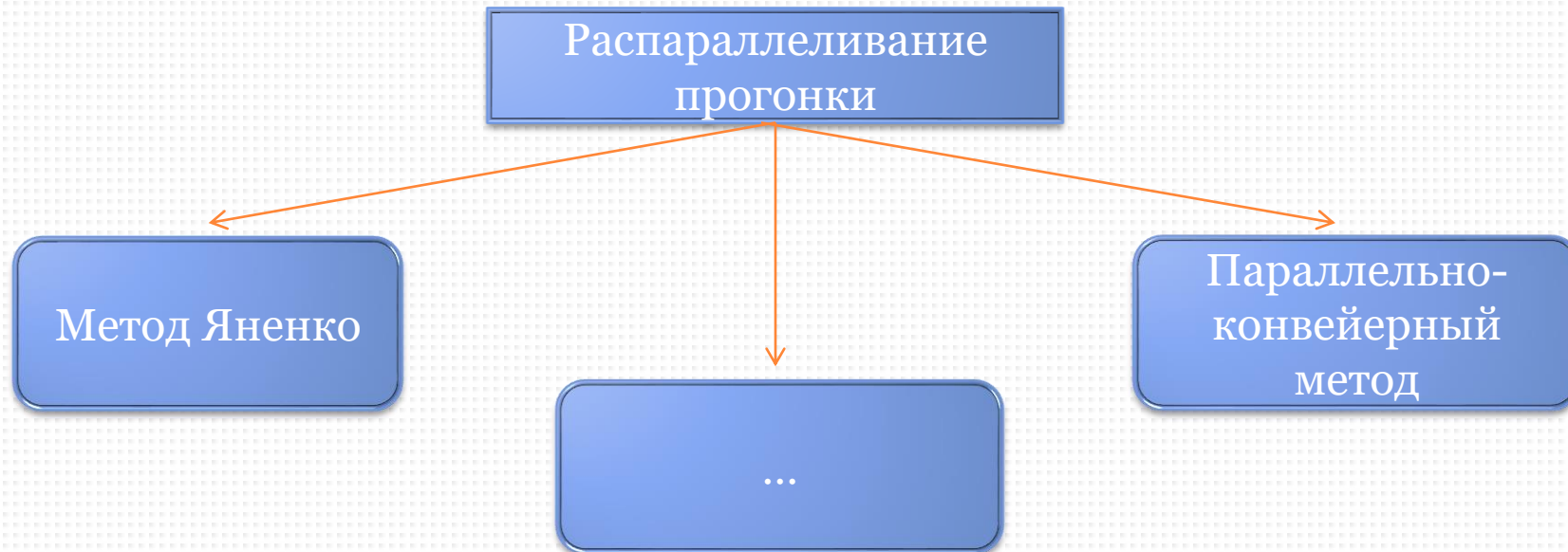
Идея решения

- Выполнить распараллеливание множество прогонок, возникающих при моделировании двумерного уравнение теплопроводности на ЭВМ

$$\begin{cases} a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = f_i, i = 1, \dots, n - 1; \\ a_0 = 0, c_n = 0. \end{cases}$$

$$(|b_i| \geq |a_i| + |c_i|, i = 0, \dots, n)$$

Идея решения



Метод Яненко

$$x_j^\mu = v_j^\mu \bar{x}_\mu + z_j^\mu \bar{x}_{\mu+1} + w_j^\mu$$

Первый этап метода Яненко

- Найти решение трех систем (этап предрешения)

$$a_j v_{j-1}^\mu + b_j v_j^\mu + c_j v_{j+1}^\mu = 0,$$
$$v_0^\mu = 1, v_m^\mu = 0;$$

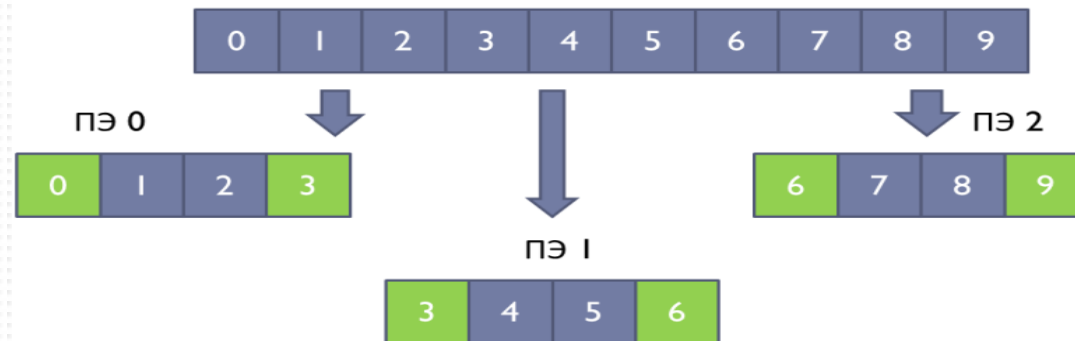
$$a_j z_{j-1}^\mu + b_j z_j^\mu + c_j z_{j+1}^\mu = 0, \quad j = 1, \dots, m - 1;$$
$$z_0^\mu = 1, z_m^\mu = 0; \quad \mu = 0, \dots, p-1;$$

$$a_j w_{j-1}^\mu + b_j w_j^\mu + c_j w_{j+1}^\mu = f_j,$$
$$w_0^\mu = 1, w_m^\mu = 0;$$

Второй этап метода Яненко

- Найти решение системы, состоящей из гранично-процессорных точек

$$A_{\mu}\bar{x}_{\mu-1} + B_{\mu}\bar{x}_{\mu} + C_{\mu}\bar{x}_{\mu+1} = F_{\mu} \quad \mu=1, \dots, p-1;$$



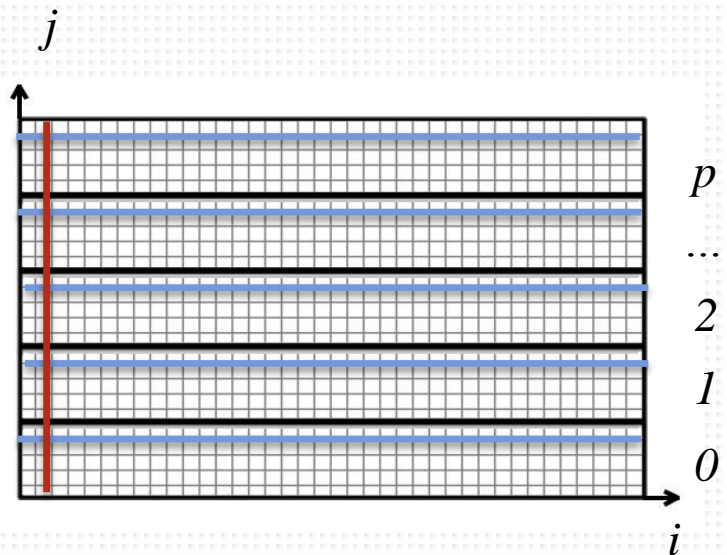
Третий этап метода Яненко

- Восстановить решение исходной системы, используя предрешения и решения, найденные в гранично – процессорных точках:

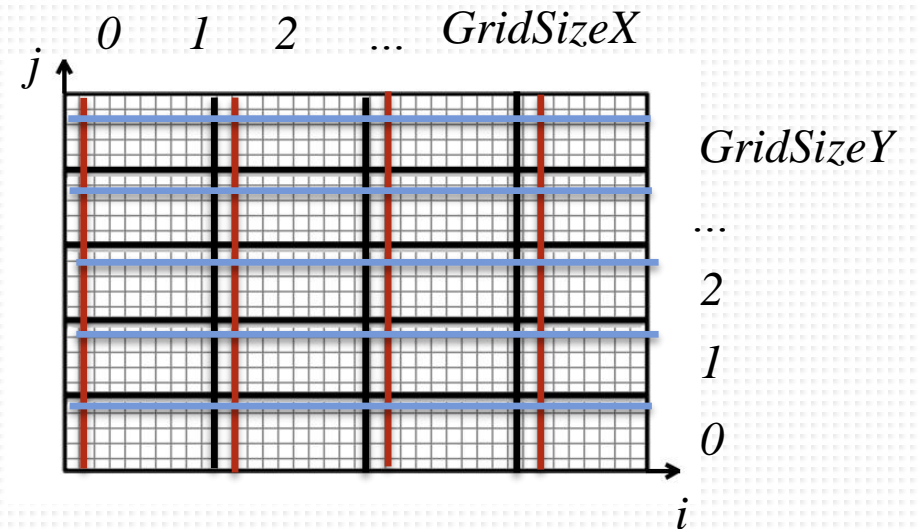
$$x_j^\mu = v_j^\mu \bar{x}_\mu + z_j^\mu \bar{x}_{\mu+1} + w_j^\mu; \quad j = 0, \dots, m; \quad \mu = 0, \dots, p - 1$$

Реализация

- 1D декомпозиция



- 2D декомпозиция
 - Построили двумерную декартовую топологию



Тестирование

- Вычислительный кластер НГУ
- 8 Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2603 (8 ядер в каждом)

| № | Описание системы | |
|---|--------------------------|---|
| 1 | Аппаратная конфигурация | Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2603 v2 @ 1.80GHz |
| | Программная конфигурация | Intel C++ Compiler 15.0.2 (уровень оптимизации -O3) |

Время работы

1D декомпозиция

| Размер задачи | Количество ядер | | | | |
|---------------|-----------------|-------|-------|-------|-------|
| | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 |
| 512 | 1,26 | 1,87 | 1,51 | 1,75 | 3,69 |
| 1024 | 6,57 | 6,33 | 4,43 | 4,61 | 8,04 |
| 2048 | 30,01 | 22,8 | 13,63 | 11,53 | 15,68 |
| 4096 | 125,01 | 93,32 | 54,89 | 42,92 | 39,88 |

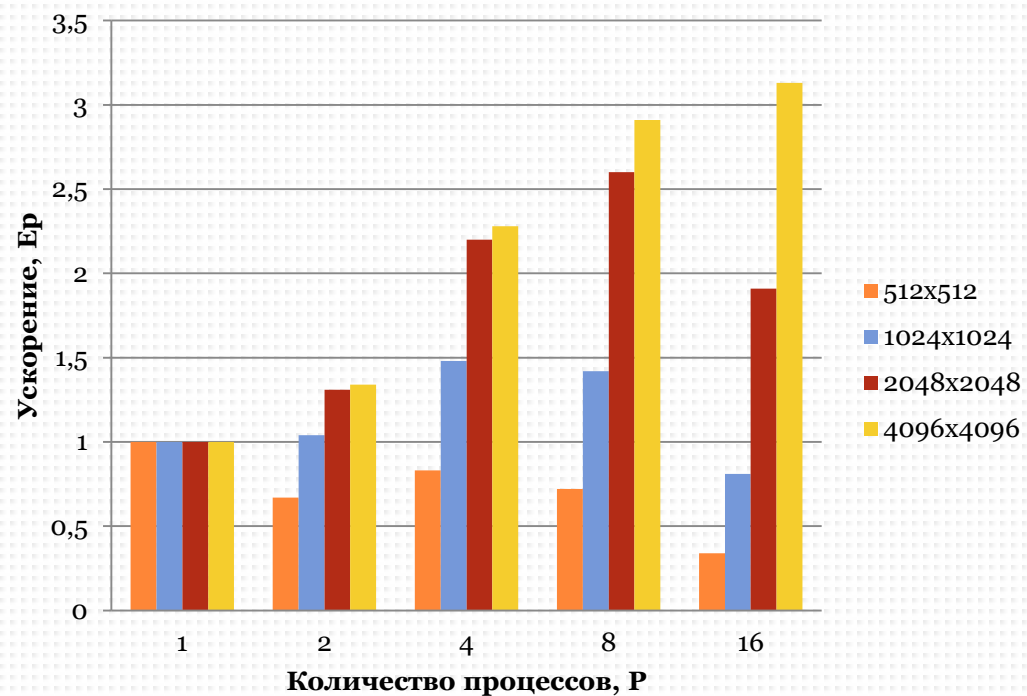
2D декомпозиция

- Декомпозиция:
 - 2x2 (4 ядер), 4x2, 4x4, 8x4, 8x8

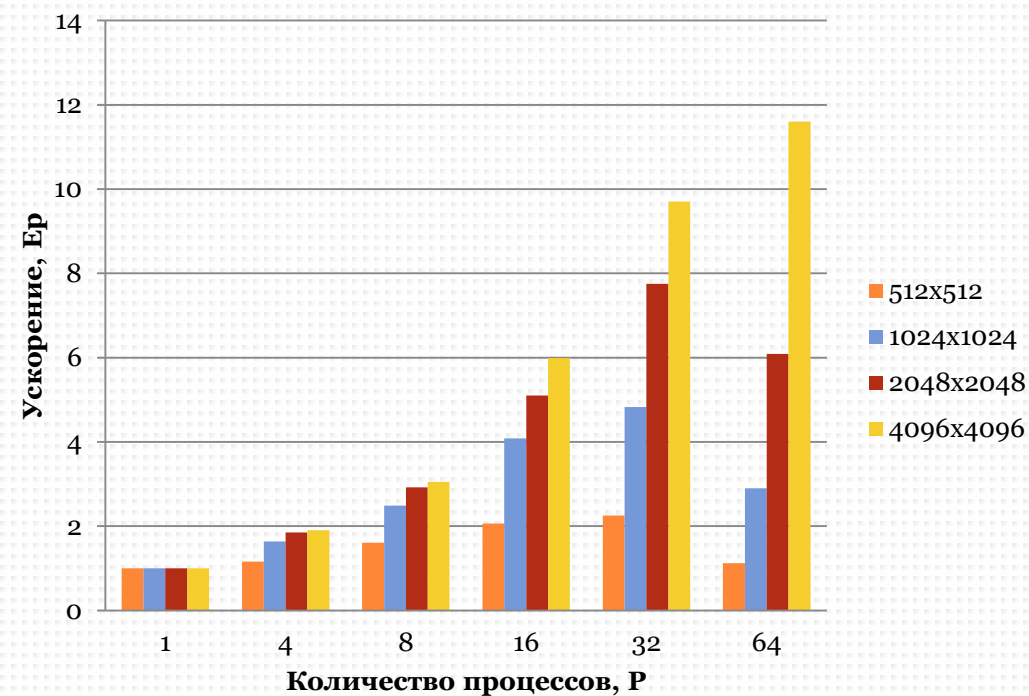
| Размер задачи | Количество ядер | | | | | |
|---------------|-----------------|-------|-------|------|-------|------|
| | 1 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |
| 512 | 1,26 | 1,09 | 0,78 | 0,61 | 0,56 | 1,12 |
| 1024 | 6,57 | 3,99 | 2,64 | 1,61 | 1,36 | 2,27 |
| 2048 | 30,01 | 16,21 | 10,26 | 5,83 | 3,87 | 4,93 |
| 4096 | 125,01 | 65,7 | 40,9 | 20,8 | 12,87 | 10,7 |

Ускорение

1D декомпозиция

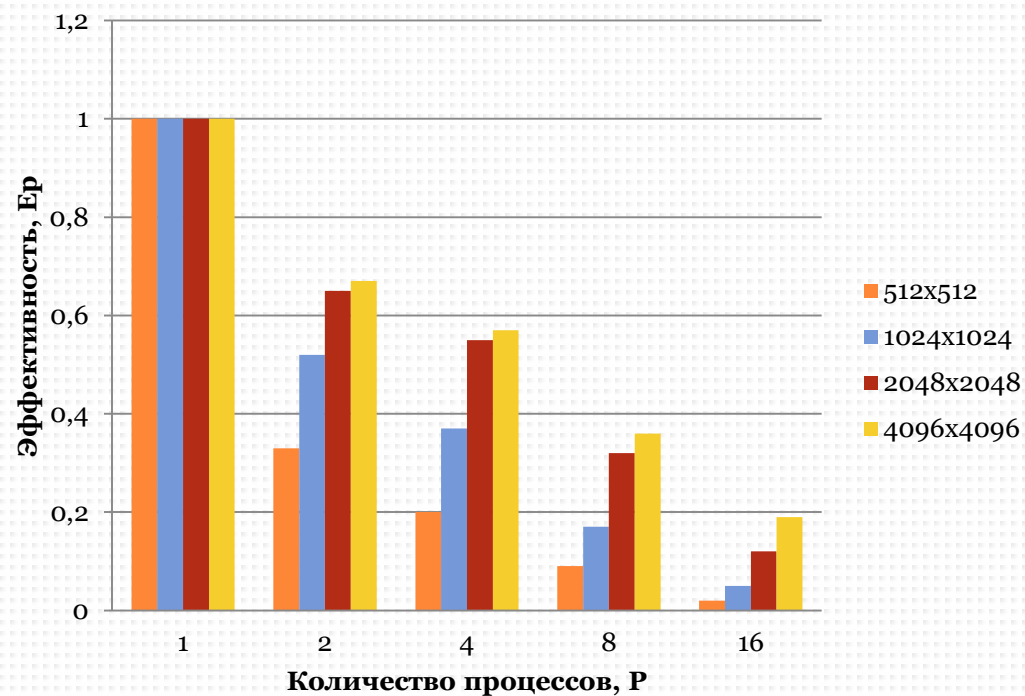


2D декомпозиция

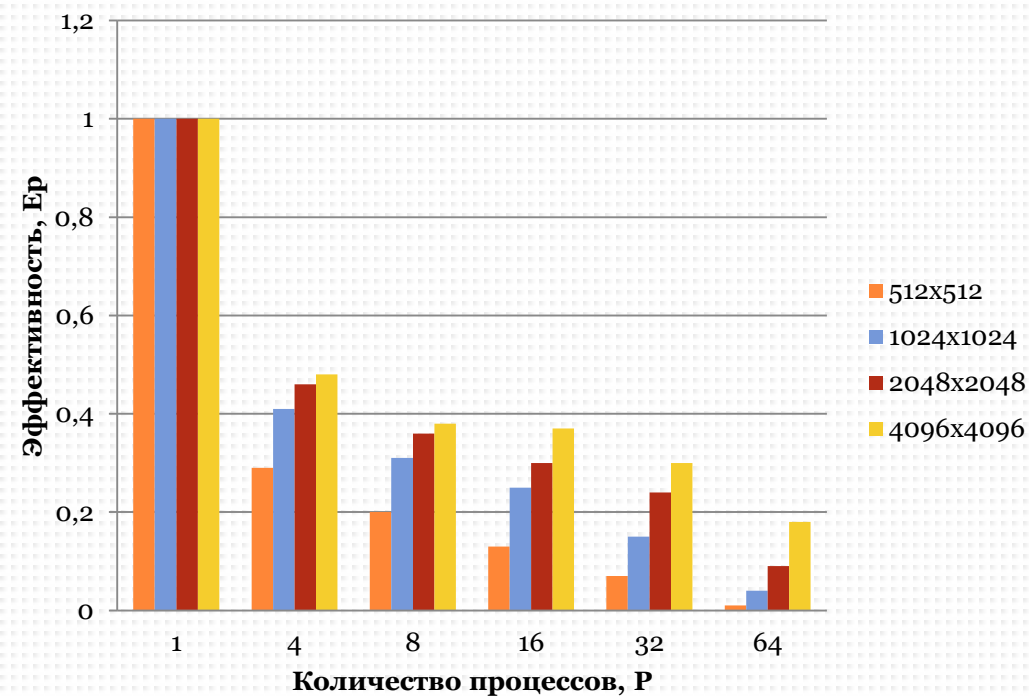


Эффективность

1D декомпозиция



2D декомпозиция

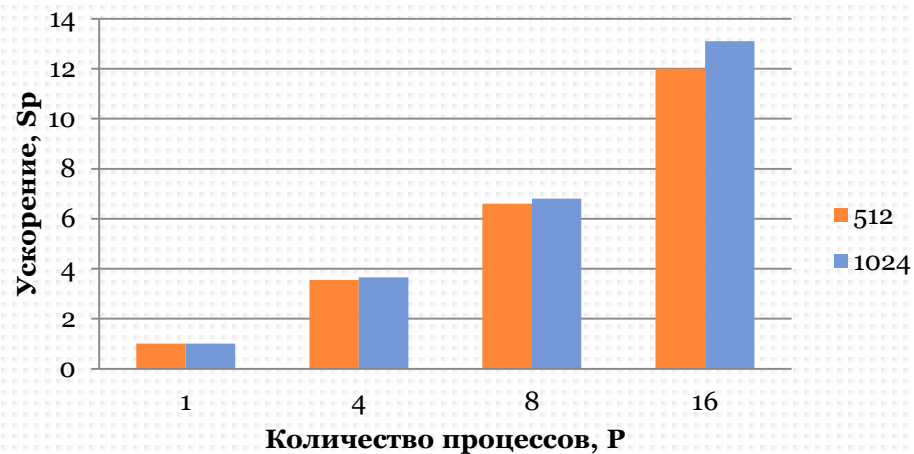


Тестирование

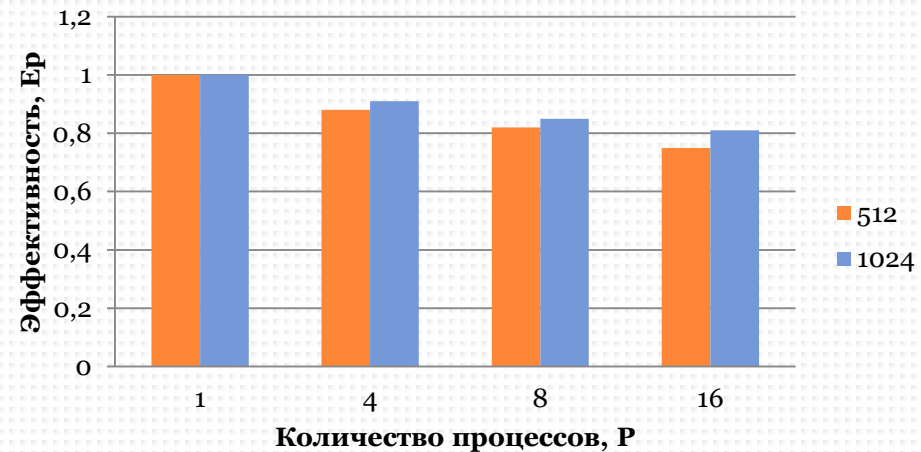
- Тестирование с усложнением коэффициентов А,В,С

| Размер задачи | Количество ядер | | | |
|---------------|-----------------|------|------|-----|
| | 1 | 4 | 8 | 16 |
| 512 | 31,39 | 8,82 | 4,83 | 2,6 |
| 1024 | 127,47 | 34,8 | 18,6 | 9,7 |

2D декомпозиция



2D декомпозиция



Заключение

- Реализован метод распараллеливание прогонки для решения уравнения теплопроводности, основанный на методе Яненко

Планируется:

- Реализация для трехмерной задачи с 3D декомпозицией
- Параллелизация второго этапа Яненко
- Применение алгоритма для решения задач нефтедобычи

Благодарю за внимание