О методах решения задач газовой динамики

Куликов Игорь

1 февраля 2009 г.

Содержание

Основные определения газовой динамики

- Газ – агрегатное состояние вещества, характеризующееся очень слабыми связями между составляющими его частицами, а также их большой подвижностью.
- Идеальный газ – газ, в котором взаимодействие между молекулами сводится к парным столкновения, причем время межмолекулярного столкновения много меньше среднего времени между столкновениями.
- Плотность газа – масса частиц газа в единице объема.

Основные определения газовой динамики

- Сплошная среда – механическая система, обладающая бесконечным числом внутренних степеней свободы. Ее движение в пространстве описывается скалярным полем плотности и векторным полем скоростей.
- Давление – физическая скалярная величина, характеризующая состояние сплошной среды и численно равная силе F, действующей на единицу площади поверхности S перпендикулярно этой поверхности.
- Газовая динамика изучает движение сплошной среды с учетом сжимаемости.

Основные определения дифференциальных уравнений

- Дифференциальное уравнение – уравнение, связывающее значение некоторой неизвестной функции в некоторой точке и значение ее производных различных порядков в той же точке.
- Решение (интеграл) дифференциального уравнения называется функция, при подстановке которой, уравнение становится тождеством.

Законы сохранения в газовой динамике

- Закон сохранения массы
- Закон сохранения импульса
- Закон сохранения энергии

Дифференциальная форма закона сохранения массы

- Выделим в потоке газа некоторый неподвижный объем V
- Изменение массы для i-й компоненты в объеме происходит за счет втекания/вытекания этой компоненты через поверхность объема:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho_i dV = -\int_\Sigma \rho_i \vec{v}_i d\sigma$$

- Используем формулу Остроградского-Гаусса:

$$\int_\Sigma \vec{a} d\sigma = \int_V div(\vec{a}) dV$$

Дифференциальная форма закона сохранения массы

- Получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho_i dV = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V div(\rho_i \vec{v}_i) dV$$

- Поскольку объем произвольный, тогда

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + div(\rho_i \vec{v}_i) = 0, \forall i = 1, ..., N$$

- Просуммируем по всем объемам и введем среднемассовую скорость $\rho \vec{v} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i$ получим уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0$$

Дифференциальная форма закона сохранения импульса

- Выделим в потоке газа некоторый подвижный объем V, который движется за счет поверхностных сил
- Изменение количества движения объема газа равно сумме действующих поверхностных сил, создаваемых давлением:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\vec{v}dV = -\int_\Sigma \vec{p}_n d\sigma$$

- Внесем производную под знак интеграла, зная что масса подвижного объема фиксирована:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\vec{v}dV = \frac{d}{dt}\int_V \vec{v}dm = \int_V \frac{d\vec{v}}{dt}dm = \int_V \rho\frac{d\vec{v}}{dt}dV$$

Дифференциальная форма закона сохранения импульса

- Используем формулу Остроградского-Гаусса для поверхностных сил:

$$\int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = -\int_V div(P) dV$$

или в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} = div(\rho \vec{v} \vec{v} + P)$$

Дифференциальная форма закона сохранения импульса

где P – тензор напряжений, а фактически матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial p}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$\vec{v}\vec{v}$ – диада, а фактически матрица

$$\begin{pmatrix} v_x v_x & v_x v_y & v_x v_z \\ v_y v_x & v_y v_y & v_y v_z \\ v_z v_x & v_z v_y & v_z v_z \end{pmatrix}$$

Дифференциальная форма закона сохранения энергии

- Выделим снова неподвижный объем V и рассмотрим для него баланс энергии:

$$\int_V \frac{\partial \rho E}{\partial t} dV = -\int_\Sigma J_E d\sigma$$

- Поток энергии складывается из конвективного переноса энергии $\rho \vec{v} E$ и работы поверхностных сил $P\vec{v}$. Используем формулу Остроградского-Гаусса, получим:

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + div(\rho \vec{v} E) = -div(P\vec{v})$$

Уравнение состояния

- Законы сохранения не дают замкнутую систему уравнений. Так нет связи между полной энергией ρE и давление P.
- Полная энергия состоит из внутренней энергии $\rho\epsilon$ и кинетической $\frac{\rho\vec{v}^2}{2}$, то есть

$$\rho E = \rho\epsilon + \frac{\rho\vec{v}^2}{2}$$

- Внутренняя энергия связана с давлением через уравнение состояния, которое для идеального газа записывается как:

$$p = (\gamma - 1)\rho\epsilon$$

где γ – показатель адиабаты

Полная система уравнений газовой динамики

- Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0$$

- Уравнение движения

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} = div(\rho \vec{v} \vec{v} + P)$$

- Уравнение полной энергии

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + div(\rho \vec{v} E) = -div(P \vec{v})$$

- Уравнение состояния $p = (\gamma - 1)\rho\epsilon$

Определение начально-краевой задачи

- Краевая задача – система дифференциальных уравнений с заданными линейными соотношениями между значениями искомых функций на краях интервала интегрирования.
- Пример краевой задачи (уравнения переноса вещества на бесконечном интервале):

$$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} + v\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} = 0$$

$$\phi(x,0) = \psi(x)$$

$$t \in [0;\, T], x \in (-\infty; +\infty)$$

Определение начально-краевой задачи

- Решением начально-краевой задачи является функция, подстановка которой в краевую задачу удовлетворяет системе дифференциальных уравнений и принимает заданные значения на краях интервала интегрирования.
- Для уравнения переноса при постоянной скорости движения вещества v точное решение можно найти по формуле
$$\phi(x, t) = \psi(x - vt)$$

Одномерное уравнение переноса с постоянной скоростью

Точное решение одномерного уравнения переноса:

$$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} + v\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} = 0$$

на бесконечном интервале с начальным условием

$$\phi(x,0) = \psi(x)$$

имеет вид:

$$\phi(x,t) = \psi(x - vt)$$

Получение уравнений акустики

Будем искать решение, которое слабо отклоняется от состояния покоя.

$$v = \hat{v}, p = p_0 + \hat{p}, \rho = \rho_0 + \hat{\rho}$$

получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \rho_0 div(\hat{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} grad(\hat{p}) = 0$$

$$\hat{p} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \hat{\rho}$$

Получение уравнений акустики

Опустим очевидные выкладки и в итоге получим систему уравнений акустики:

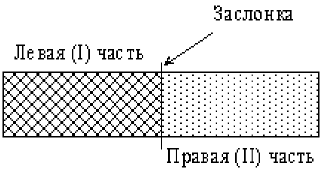
$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

где $c_0^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$ – квадрат скорости звука.

Задача о трубе, разделенной заслонкой

Будем рассматривать конфигурацию трубы, наполненной газом. В левой части трубы заданы скорость v_I и давление p_I, в правой части трубы заданы скорость v_{II} и давление p_{II}. Заслонка в начальный момент времени убирается.



Получение точного решения задачи о распаде акустического разрыва

Преобразуем уравнения акустики к виду:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(v + \frac{p}{c_0\rho_0}\right) + c_0\frac{\partial}{\partial x}\left(v + \frac{p}{c_0\rho_0}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(v - \frac{p}{c_0\rho_0}\right) - c_0\frac{\partial}{\partial x}\left(v - \frac{p}{c_0\rho_0}\right) = 0$$

Нетрудно заметить, что мы имеем два уравнения переноса, аналитическое решение которых мы можем найти.

Получение точного решения задачи о распаде акустического разрыва

После преобразований получим точное решение задачи о распаде акустического разрыва:

$$v = v_I, p = p_I; x < \tilde{x} - c_0 t$$

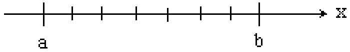
$$v = v_{II}, p = p_{II}; x > \tilde{x} + c_0 t$$

$$v = \frac{v_I + v_{II}}{2} - \frac{p_{II} - p_I}{2\rho_0 c_0}, \tilde{x} - c_0 t \leq x \leq \tilde{x} + c_0 t$$

$$p = \frac{p_I + p_{II}}{2} - \rho_0 c_0 \frac{u_{II} - u_I}{2}, \tilde{x} - c_0 t \leq x \leq \tilde{x} + c_0 t$$

Дискретизация расчетной области

Выделим на бесконечной оси x конечный интервал $[a; b]$ и разделим этот интервал на N одинаковых частей:



Таким образом, вводится равномерная расчетная сетка с N ячейками или объемами. Шаг сетки определяется $h = \frac{b-a}{N}$. Перейдем от непрерывных функций к их дискретным аналогам $f_i = f(x_i), \forall i = 1, ..., N$.

Основные определения численных методов

- Разностная схема – это конечная система алгебраических уравнений, поставленная в соответствие какой-либо дифференциальной задаче, содержащей дифференциальное уравнение и краевые условия и/или начальное распределение.
- Явная схема – схема представимая в виде $u(t + \Delta t) = F(u(t))$
- Неявная схема – схема представимая в виде $F(u(t), u(t + \Delta t)) = 0$

Основные определения численных методов

Пусть $\tilde{u}_h$ - точное решение дифференциальной задачи, u_h - приближенное решение по численной схеме, тогда:

- схема устойчива, если при $h \to 0$ имеет место $u_h \to \tilde{u}_h$
- если имеет место неравенство $\|\tilde{u}_h - u_h\| < Ch^n$, то схема аппроксимирует дифференциальную задачу с порядком n

Алгоритм решения начально-краевой задачи с помощью явной численной схемы

1. Определение начального условия для решения
2. Для каждого объема по численной схеме получаем значение на новом временном слое
3. Определяем краевые условия
4. В качестве начального условия для решения задачи на следующем временном слое используем только что полученное схемой решение

Метод Годунова для одномерной акустики

Метод Годунова для одномерной задачи акустики для произвольного объема i выглядит следующим образом:

$$v_i^{n+1} = v_i^n - \frac{\tau}{\rho_0 h}(P_{i+\frac{1}{2}} - P_{i-\frac{1}{2}})$$

$$p_i^{n+1} = p_i^n - \frac{\tau}{h}\rho_0 c_0^2(V_{i+\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2}})$$

где $P_{i\pm\frac{1}{2}}, V_{i\pm\frac{1}{2}}$ – находятся из одномерной задачи о распаде акустического разрыва. Схема устойчива если $\frac{\tau c_0}{h} \leq 1$.

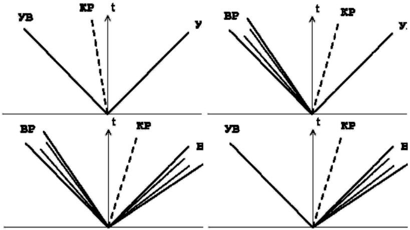
Описание тестовых задач Toro

Вернемся к уравнениям газовой динамики. Рассмотрим трубу с газом. Параметр $\gamma = 1.4$. Приведем параметры тестов в виде таблицы:

Параметр	Тест 1	Тест 2	Тест 3	Тест 4	Тест 5
ρ_I	1	1	1	5.99924	1
v_I	0.75	-2	0	19.5975	-19.59745
p_I	1	0.4	1000	460.894	1000
ρ_{II}	0.125	1	1	5.99242	1
v_{II}	0	2	0	-6.19633	-19.59745
p_{II}	0.1	0.4	0.01	46.095	0.01
x_0	0.3	0.5	0.5	0.4	0.8
t	0.2	0.15	0.012	0.035	0.012

Точные решения тестов Toro

В зависимости от соотношения $v_I - v_{II}$ может получаться получиться одна из следующих конфигураций, решение которых существует и единственно:



Назначение тестовых задач Toro

Назначение тестов Toro:

1. возможность моделирования усиленного размазывания ударных волн
2. воспроизведение существенной области разрежения
3. способность метода устойчиво моделировать сильные возмущения с возникновением быстро распространяющихся ударных волн
4. способность метода моделировать наличие трех разрывов
5. способность метода моделировать волну-предшественник

Дивергентная запись уравнений газовой динамики

Запишем уравнения газовой динамики в следующем виде:

$$U_t + F_x = 0$$

где вектора U и F определяются следующим образом:

$$U = \{\rho, \rho v, \rho E\}^T$$

$$F = \{\rho v, \rho v^2 + p, \rho v E + p v\}^T$$

Метод Годунова для системы уравнений газовой динамики

Метод Годунова для одномерной задачи газовой динамики для произвольного объема i выглядит следующим образом:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\tau}{h}(F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}})$$

Где поток через границы ячеек $F_{i\pm\frac{1}{2}}$ определяется из точного решения задачи Римана распада произвольного разрыва. Схему устойчива, если выполняется $CFL = \frac{\tau(c_0+v_{max})}{h} \leq 1$, где CFL – число Куранта.

Задачи по лекции

- Построение точного решения для задачи распада акустического разрыва
- Построение точного решения для задачи Римана распада произвольного разрыва
- Исследование метода Годунова для решения задач акустики
- Исследование модификаций метода Годунова для решения задач акустики

Задачи по лекции

- Исследование метода Годунова для решения задач газовой динамики
- Исследование модификаций метода Годунова для решения задач газовой динамики
- Проведение численного эксперимента по моделированию столкновения ударных волн

Литература

- Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. Математический сборник, 1959, 47, вып.3.
- Годунов С.К. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. с. 400.

Литература

- Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968. с. 688.
- Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. с. 608.
- Стулов В.П. Лекции по газовой динамике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. с. 192.